

NUMERIČNA SIMULACIJA TALJENJA V DVODIMENZIONALNI KOTANJI

NUMERICAL SIMULATION OF MELTING IN TWO-DIMENSIONAL CAVITY

Jure Mencinger, Božidar Šarler

LFDI, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

Prejem rokopisa - received: 1999-07-01; sprejem za objavo - accepted for publications: 1999-07-05

Navadno se zaradi temperaturnih razlik pri taljenju snovi v kapljevini pojavi konvekcija. Ta bistveno poveča prenos toplote, kar neposredno vpliva na položaj medfaznega roba. V delu je predstavljen primer izračuna časovnega poteka taljenja čiste snovi v dvodimenzionalni pravokotni kotanji od trenutka, ko je temperatura stranske stene postavljena nad temperaturo tališča. Poleg položaja medfaznega roba so prikazani še temperaturno in hitrostno polje ter časovni potek Nusseltovega števila. Račun je izveden z metodo kontrolnih prostornin na neenakomerni fiksni mreži. Temelji na enofaznem modelu oziroma modelu kontinuumske mešanice, ki definira krajevno odvisno funkcijo deleža posamezne faze.

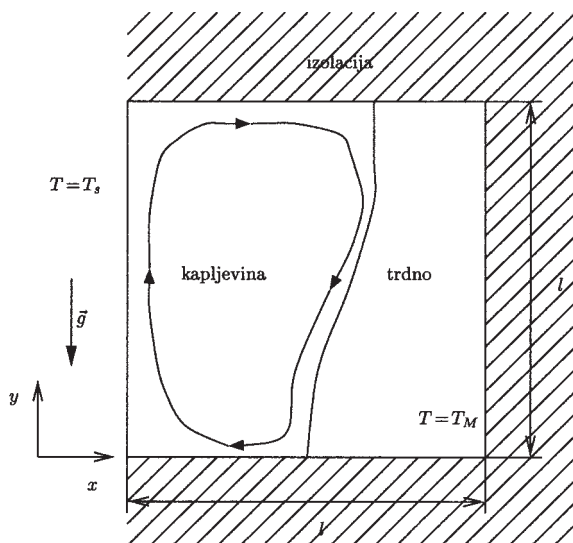
Ključne besede: taljenje, enofazni model, numerična simulacija

Because of the differences in temperature which are present in the melt, convection usually appears. Convective heat transfer directly influences the position of the solid-liquid interface. Numerical simulation of melting of pure substance in rectangular two-dimensional cavity is presented in this work. Melting is observed from the moment when one side wall's temperature is set above melting point. Besides the front position, velocity field, temperature field and Nusselt number are also observed. The control volume method with nonuniform fixed grid is used for the calculation. It is based on the continuum (one-phase) model which defines space dependent phase fraction function.

Key words: melting, one-phase model, numerical simulation

1 OPIS

Kvadratno kotanjo (slika 1) s stranico l zapolnjuje snov v trdnem stanju pri temperaturi tališča T_M . Stene kotanje so toge, zgornja, spodnja in desna pa tudi toplotno izolirane (adiabatne). Začetno homogeno temperaturno polje se začne spreminjati, ko ob času $t = t_0$ levo steno staknemo s toplotnim rezervoarjem s temperaturo T_s , ki je višja od temperature tališča ($T_s > T_M$). Zato se začne snov ob levi steni taliti, temperaturne



Slika 1: Shematski prikaz taljenja v kotanji
Figure 1: A schematic explanation of melting in cavity

razlike pa v nastajajoči kapljevinski fazi poženejo konveksijski tok, ki vpliva na taljenje. Nastali tok namreč poveča prenos toplote od leve stene, preko kapljevine v trdno fazo. Na desni steni vzdržujemo začetno temperaturo T_s . Zanimamo se za časovni razvoj temperaturnega in hitrostnega polja, ter položaj medfaznega roba.

Privzamemo, da lahko primer obravnavamo dvodimenzionalno. Privzetek je dober, če npr. skozi sprednjo in zadnjo steno ni toplotnega toka, kapljevina pa na njih "zdrsne" ali v primeru, ko je kotanja zelo dolga in opazujemo dogajanje na sredini. Dodatni približki so še:

- nestisljivost kapljevine ($\nabla \cdot \vec{v}) = 0$)
- Boussinesquova aproksimacija in enakost gostot trdne in kapljevinske faze ($\rho_l = \rho_s = \rho$)
- konstantna viskoznost kapljevinske faze
- temperaturna neodvisnost in enakost specifičnih toplot obeh faz ($c_{pl} = c_{ps} = c_p$)
- temperaturna neodvisnost in enakost toplotnih prevodnosti obeh faz ($\lambda_l = \lambda_s = \lambda$).

Zadnja približka pri večini realnih problemov sicer nista dopustna in hkrati tudi ne pomenita bistvene poenostavitve numeričnega reševanja. Omogočata predvsem manjše število parametrov in bolj enostaven prehod na brezdimenzijske količine, s katerimi obravnavamo problem. Za pojav se namreč zanimamo bolj splošno, predvsem nas zanima vpliv konvekcije na taljenje.

2 MODEL

Za izračune uporabimo enofazni model oziroma model kontinuumske mešanice, v katerem je definirana funkcija f_i :

$$f_i = \begin{cases} 0, & T \leq T_M \text{ (v trdni snovi)} \\ 1, & T > T_M \text{ (v kapljevini)} \end{cases} \quad (1)$$

Funkcija omogoča hkratno obravnavo obeh domen, tako da ni potrebno eksplicitno spremljati položaja medfaznega roba. Časovno in krajevno odvisnost neznanih količin, tj. entalpije h in hitrostnega polja \vec{v} , podajajo transportne enačbe, veljavne na celotnem območju (kotanji).

Prenos toplote opisuje enačba:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} h) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (\rho \vec{v} (h_l - h)), \quad (2)$$

pri čemer je h specifična entalpija mešanice:

$$h = f_l h_l + (1 - f_l) h_s; \quad h_l = c_{pT} + f_l L; \quad h_s = c_p T \Rightarrow \Rightarrow h = c_p T + f_l L \quad (3)$$

V gornjih izrazih je L specifična talilna toplota. Zadnji člen na desni v enačbi (2) izhaja iz izpeljave modela¹. Z \vec{v} je označena hitrost mešanice:

$$\vec{v} = f_l \vec{v}_l + (1 - f_l) \vec{v}_s = f_l \vec{v}_l. \quad (4)$$

Predpostavljamo namreč, da je hitrost v trdni snovi enaka nič ($\vec{v}_s = 0$).

Spreminjanje hitrostnega polja podaja enačba:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p_l + \nabla \cdot (\eta_l \nabla \vec{v}) - f_l \beta (T - T_M) \vec{g} - \nabla \cdot (\rho \vec{v} (\vec{v}_l - \vec{v})) - (1 - f_l) K \vec{v}, \quad (5)$$

kjer tretji člen na desni pomeni vzgonski pospešek, sorazmeren s temperaturno razteznostjo kapljevine β . Zadnja dva člena izhajata iz izpeljave modela. Zadnji člen je dodatno poenostavljen in zagotavlja ničelno hitrost v trdni fazi, če je količina K dovolj velika.

Enačbi (2) in (5) izrazimo z brezdimenzijskimi količinami v obliki:

$$\frac{\partial H}{\partial F_0} + \nabla \cdot (\vec{V} H) = \nabla^2 \Theta - \frac{1}{Ste} \nabla \cdot \vec{V} (f_l - 1) \quad (6)$$

za entalpijsko polje, za hitrostno pa:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial F_0} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = -\nabla P_l + Pr \nabla^2 \vec{V} + Pr Ra f_l \Theta \vec{j} - \nabla \cdot (\vec{V} (\vec{V}_l - \vec{V})) - \gamma (1 - f_l) \vec{V} \quad (7)$$

kjer \vec{j} označuje navpičen (navzgor obrnjen) enotski vektor, ki kaže v isto smer kot vzgonska sila. Pretvorbo med dimenzijskimi in brezdimenzijskimi količinami podajajo enakosti:

$$X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{l}, \quad F_0 = \frac{\lambda}{l^2 \rho c_p} (t - t_0),$$

$$\Theta = \frac{T - T_M}{T_s - T_M},$$

$$H = \frac{h}{c_p (T_s - T_M)}, \quad \vec{V} = \frac{l \rho c_p}{\lambda} \vec{v}, \quad (8)$$

$$P = \frac{l^2 \rho c_p^2}{\lambda^2} p, \quad \gamma = \frac{l^2 c_p}{\lambda} K.$$

V enačbah (6) in (7) nastopajo za obravnavani primer značilna brezdimenzijska števila:

$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}, \quad Ra = \frac{g \beta (T_s - T_M) l^3 \rho^2 c_p}{\eta \lambda}$$

in
$$Ste = \frac{c_p (T_s - T_M)}{L} \quad (9)$$

Prvo je Prandtlovo Pr , ki podaja razmerje med hitrostima difuzijskega prenosa gibalne količine in toplote ter je odvisno od snovnih lastnosti. Drugo število je Rayleighovo Ra , ki pove, kako močna je konvekcija v kotanji. Tretje, Stefanovo število Ste , je mera za pregetost kapljevine nad tališčem, izražena s specifično talilno toploto L .

3 NUMERIČNA SIMULACIJA

Numerična simulacija procesa temelji na metodi kontrolnih prostornin² in je podrobneje opisana v referenci³. Za izračun danega primera je uporabljena neenakomerna ortogonalna mreža, sestavljena iz 100 x 80 kontrolnih prostornin (**slika 2**) in močno zgoščena pri levem robu, kjer je (na začetku) velik gradient entalpijskega polja.

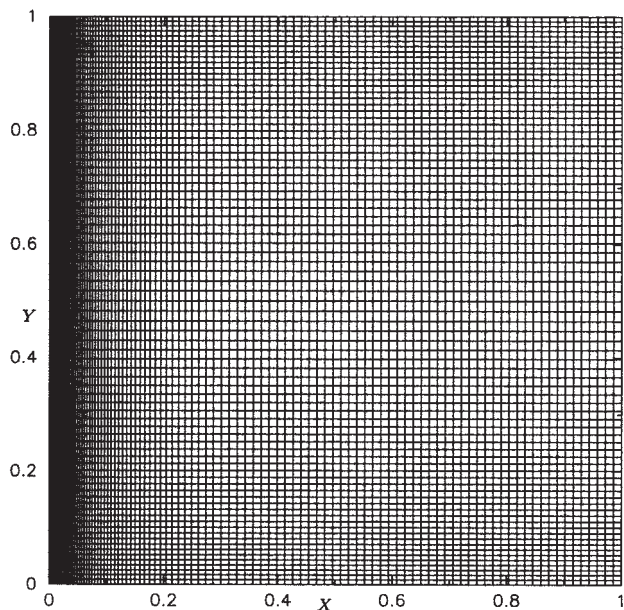
Računski algoritem lahko na kratko opišemo z naslednjimi koraki:

1. inicializacija: $F_0 = 0$, $\vec{v} = 0$, $h = 0$, $\Theta = 0$, $f_l = 0$
2. začetek časovnega koraka: $F_0 := F_0 + \Delta F_0$
3. reši enačbo za hitrostno polje (metoda SIMPLER)
4. reši enačbo za entalpijsko polje
5. izračunaj temperaturno polje Θ
6. izračunaj delež kapljevinaste faze f_l
7. če je dosežena konvergenca znotraj časovnega koraka, izvedi korak 2, sicer korak 3

Za izračun vrednosti na vsakem časovnem koraku je uporabljena popolnoma implicitna shema. Konvergenco znotraj časovnega koraka določa merilo:

$$\frac{\max_{i,j}(\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n)}{\left| \max_{i,j}(\phi_{i,j}^{n+1}) - \min_{i,j}(\phi_{i,j}^{n+1}) \right|} \leq \epsilon_{\text{korak}} \quad (10)$$

kjer je ϕ^{n+1} matrika vrednosti izračunanavanega polja (U , V ali H) in ϕ^{n+1} izračunana vrednost iz prejšnje iteracije. Za doseganje konvergenca v izračunu uporabimo približek zveznega faznega prehoda na temperaturnem intervalu $\Delta \Theta$, tako da namesto (1) pišemo:



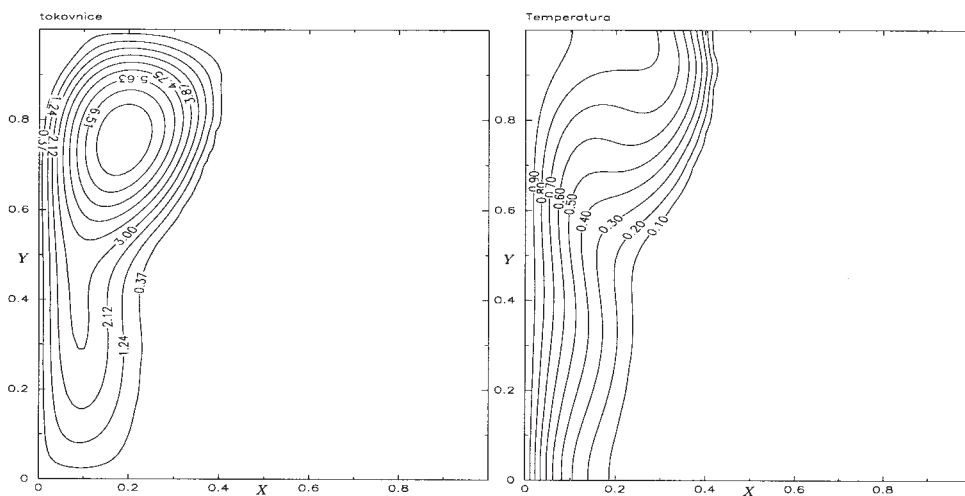
Slika 2: Neenakomerna mreža iz 100 x 80 kontrolnih prostornin
 Figure 2: Nonuniform grid: 100x80 control volumes

$$f_l = \begin{cases} 0, & \Theta \leq 0 \\ \frac{\Theta}{\Delta_\Theta}, & 0 < \Theta \leq \Delta_\Theta \\ 1, & \Theta > \Delta_\Theta \end{cases} \quad (11)$$

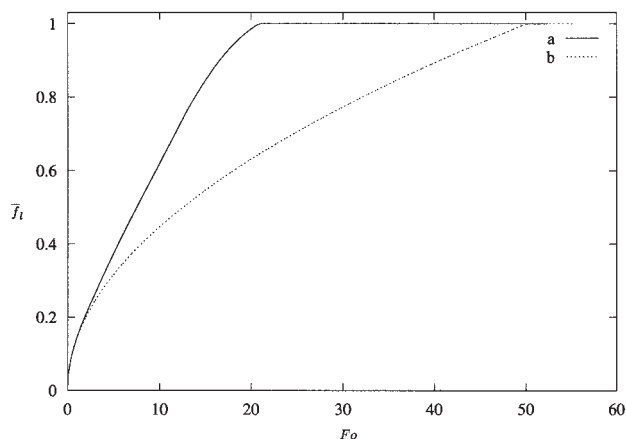
V predstavljenem izračunu so bile uporabljene vrednosti: $\Delta_{Fo} = 2 \times 10^{-4}$, $\epsilon_{korak} = 10^{-5}$ in $\Delta_\Theta = 10^{-3}$.

4 IZRAČUN IN RAZPRAVA

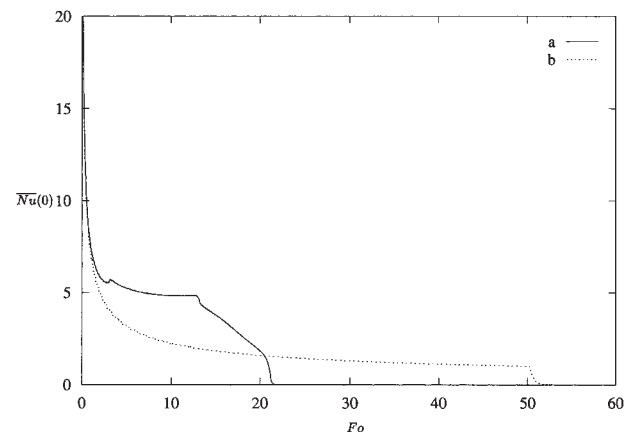
Izračun izvedemo za primer $Ste = 0,01$, $Pr = 0,01$, $Ra = 10^6$. Opazujemo časovni potek celotnega deleža kapljavine \bar{f}_l , ki ga izračunamo:



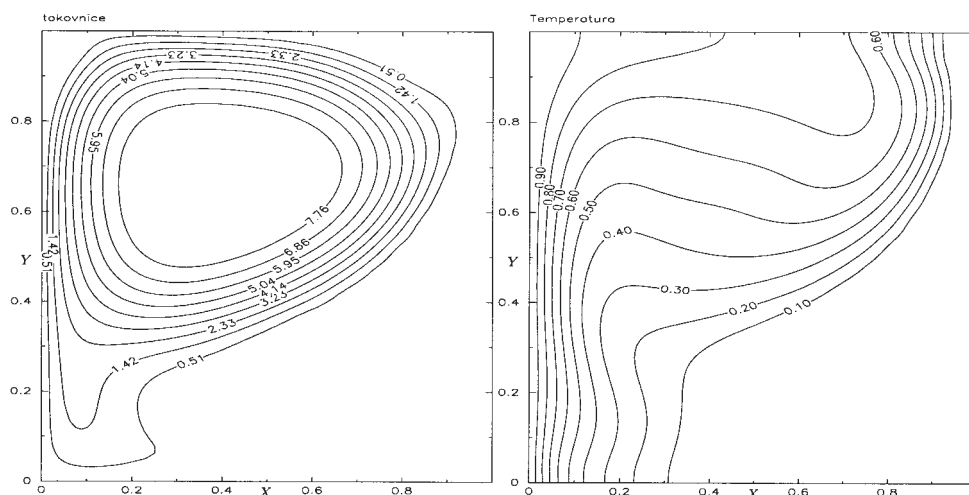
Slika 5: Tokovnice in izoterme ob $Fo = 4,0$
 Figure 5: Streamlines and isotherms at $Fo = 4.0$



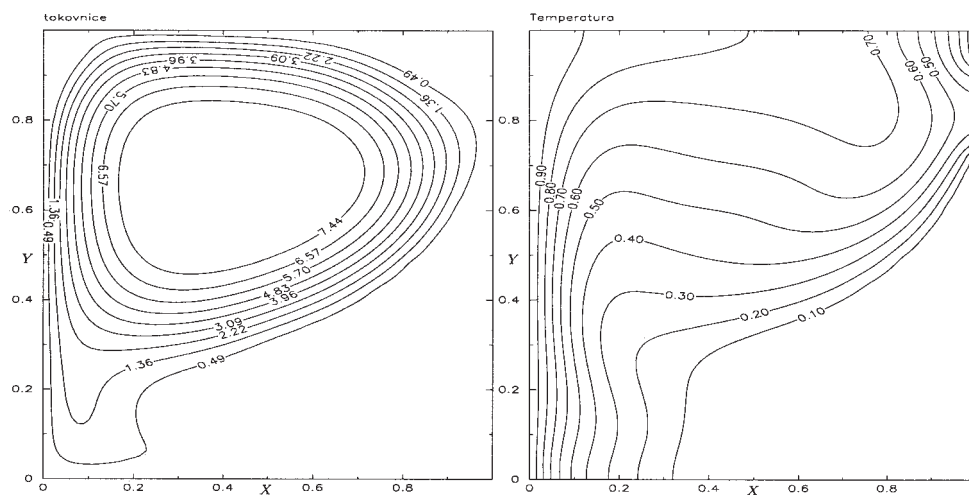
Slika 3: Skupni delež kapljavine f_l v odvisnosti od Fo ; a - taljenje s konvekcijo, b - taljenje brez konvekcije
 Figure 3: Total liquid fraction as function of Fo ; a - melting with convection, b - melting without convection



Slika 4: Povprečno Nusseltovo število na levi steni v odvisnosti od Fo ; a - taljenje s konvekcijo, b - taljenje brez konvekcije
 Figure 4: Average Nusselt number at the left wall as function of Fo ; a - melting with convection, b - melting without convection



Slika 6: Tokovnice in izoterme ob $Fo = 12,0$
Figure 6: Streamlines and isotherms at $Fo = 12.0$



Slika 7: Tokovnice in izoterme ob $Fo = 13,0$
Figure 7: Streamlines and isotherms at $Fo = 13.0$

$$\bar{f}_i = \int_0^1 \int_0^1 f_i(X, Y) dXdY \quad (12)$$

in ga prikazuje **slika 3**. Za primerjavo je dodan tudi potek položaja medfaznega roba pri taljenju brez konvekcije ($Ra = 0$).

Zanimiv je časovni potek povprečnega Nusseltovega števila na levi steni $\bar{Nu}(0)$:

$$\bar{Nu}(X) = \int_0^1 \left[-\frac{\partial \Theta}{\partial X}(X) + U(X)H(X) \right] dY. \quad (13)$$

Kot je razvidno s **slike 4**, je število $\bar{Nu}(0)$ na začetku procesa zelo veliko. Konvekcija tedaj še ne prispeva bistveno k prenosu toplote, saj je prostor, zapolnjen s kapljevinsasto fazo, še razmeroma majhen. S povečevanjem le-tega postaja vpliv konvekcije močnejši in vrednost $\bar{Nu}(0)$ začne naraščati. Hkrati se zaradi nagiba

medfaznega roba moč kovekcije zmanjšuje; v limitnem primeru, ko bi bil medfazni rob vodoraven, konvekcije sploh ne bi bilo. Tako si lahko razložimo spremembo predznaka časovnega odvoda števila $\bar{Nu}(0)$ pri $Fo \approx 3,2$. Naklon krivulje se znatno spremeni tudi, ko medfazni rob doseže desno steno, kar se zgodi tudi pri taljenju brez konvekcije. **Slike 5, 6 in 7** prikazujejo tokovnice in izoterme v treh različnih časovnih trenutkih. Na **sliki 6** je prikazana situacija, predno medfazni rob doseže levo steno, na **sliki 7** pa po tem.

Za predstavljeni primer ne obstaja analitična rešitev, zato je ocena točnosti izračuna možna s primerjavo z eksperimentalnimi podatki ali z rezultati drugih avtorjev. Uporabljeni model in metoda je bila verificirana s primerjavo z rezultati drugih modelov in metod⁴. Opisano simulacijo lahko uporabimo pri preučevanju številnih naravnih in tehnoloških procesov.

5 LITERATURA

- ¹W. D. Bennon, F. P. Incropera, A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems, *Int.J.Heat Mass Transfer*, 30 (1987) 2161-2170
- ²S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York, 1980
- ³J. Mencinger, Modeliranje prenosa toplote in gibalne količine pri taljenju in strjevanju Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 1998
- ⁴O. Bertrand, B. Binet, H. Combeau, S. Coutrier, Y. Delannoy, D. Gobin, M. Lacroix, P. Le Quere, M. Medale, J. Mencinger, G. Viera, Melting driven by natural convection - A comparison exercise: first results, *Revue Generale de Thermique*, 38 (1999) 5-26